ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324

УДК 517.927.4+517.988.63

Исследование периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородной нелинейностью

Алижон Набиджанович НАИМОВ, Михаил Васильевич БЫСТРЕЦКИЙ

ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет»

160000, Российская Федерация, г. Вологда, ул. Ленина, 15

Аннотация. В статье рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой выделена главная нелинейная часть, являющаяся квазиоднородным отображением. Исследуется вопрос о существовании периодических решений. Рассмотрение квазиоднородного отображения позволяет обобщить ранее известные результаты о существовании периодических решений для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью. Доказана априорная оценка периодических решений в предположении, что соответствующая невозмущенная система уравнений с квазиоднородной правой частью не имеет ненулевых ограниченных решений. В условиях априорной оценки получены следующие результаты: 1) доказана инвариантность существования периодических решений при непрерывном изменении (гомотопии) главной квазиоднородной нелинейной части; 2) решена задача гомотопической классификации двумерных квазиоднородных отображений, удовлетворяющих условиям априорной оценки; 3) доказан критерий существования периодических решений для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной квазиоднородной нелинейностью.

Ключевые слова: квазиоднородная нелинейность, периодическое решение, априорная оценка, инвариантность существования периодических решений, вращение векторного поля

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00032, https://rscf.ru/project/23-21-00032/).

Для цитирования: *Наимов А.Н., Быстрецкий М.В.* Исследование периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородной нелинейностью // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 309–324. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324

Investigation of periodic solutions of a system of ordinary differential equations with quasi-homogeneous non-linearity

Alizhon N. NAIMOV, Mikhail V. BYSTRETSKII
Vologda State University
15 Lenin St., Vologda 160000, Russian Federation

Abstract. The article considers a system of ordinary differential equations in which the main nonlinear part, which is a quasi-homogeneous mapping, is distinguished. The question of the existence of periodic solutions is investigated. Consideration of a quasi-homogeneous mapping allows us to generalize previously known results on the existence of periodic solutions for a system of ordinary differential equations with the main positively homogeneous non-linearity. An a priori estimate for periodic solutions is proved under the condition that the corresponding unperturbed system of equations with a quasi-homogeneous right-hand side does not have non-zero bounded solutions. Under the conditions of an a priori estimate, the following results were obtained: 1) the invariance of the existence of periodic solutions under continuous change (homotopy) of the main quasi-homogeneous non-linear part was proved; 2) the problem of homotopy classification of two-dimensional quasi-homogeneous mappings satisfying the a priori estimation condition has been solved; 3) a criterion for the existence of periodic solutions for a two-dimensional system of ordinary differential equations with the main quasi-homogeneous non-linearity is proved.

Keywords: quasi-homogeneous non-linearity, periodic solution, a priori estimate, invariance of the existence of periodic solutions, the mapping degree of a vector field

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00032, https://rscf.ru/project/23-21-00032/).

Mathematics Subject Classification: 34C25, 47H11, 55M25.

For citation: Naimov A.N., Bystretskii M.V. Investigation of periodic solutions of a system of ordinary differential equations with quasi-homogeneous non-linearity. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 309–324. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-309-324 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть R^n — пространство n-мерных векторов с вещественными координатами, $n \geq 2$. Пусть заданы положительные числа ω, ν и вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с положительными координатами. Через $\mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ обозначим множество непрерывных отображений $P = (P_1, \ldots, P_n) : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$, удовлетворяющих условиям

1) ω-периодичности по t: $P(t+\omega, y) \equiv P(t, y)$,

2) квазиоднородности по $y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$P_j(t, \lambda^{\alpha_1} y_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} y_n) \equiv \lambda^{\alpha_j + \nu} P_j(t, y_1, \ldots, y_n) \quad \forall \lambda > 0, \quad j = \overline{1, n};$$

а через $\mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ — множество непрерывных отображений $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathrm{R}^{1+n} \mapsto \mathrm{R}^n$, удовлетворяющих условиям

3) ω-периодичности по t: $f(t+\omega, y) \equiv f(t, y)$;

4) ограниченности на порядок роста по $y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$\lim_{r \to +\infty} r^{-(\alpha_j + \nu)} \max_{0 \leq t \leq \omega, \ |y| \leq 1} |f_j(t, r^{\alpha_1} y_1, \ldots, r^{\alpha_n} y_n)| = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$x'(t) = P(t, x(t)) + f(t, x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^n, \quad t \in \mathrm{R}, \tag{0.1}$$

где $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$, $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$. Вектор-функцию $x \in C^1(\mathrm{R}; \mathrm{R}^n)$ называем ω-периодическим решением системы (0.1) , если $x(t)$ удовлетворяет этой системе и $x(t+\omega) \equiv x(t)$.

В настоящей работе исследованы условия на $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$, обеспечивающие существование ω-периодических решений системы уравнений (0.1) при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$. В системе уравнений (0.1) слагаемое P называем главной и квазиоднородной нелинейностью, а f считаем возмущением.

Существование периодических решений для систем уравнений вида (0.1) в случае положительно однородного отображения P, когда $\alpha = (1, \ldots, 1)$, исследовано в работах [1, 2] методом априорной оценки и методами вычисления вращения векторных полей. Суть метода априорной оценки состоит в доказательстве ограниченности множества ω-периодических решений по норме пространства $C([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$ при предположении, что невозмущенная система уравнений

$$z'(t) = P(t_0, z(t)), \quad z(t) \in \mathrm{R}^n, \tag{0.2}$$

при любом фиксированном $t_0 \in [0, \omega]$ не имеет ненулевых ограниченных решений. В этом случае вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t (P(s, x(s)) + f(s, x(s)))\, ds, \quad x \in C([0, \omega]; \mathrm{R}^n),$$

не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$. Поэтому, согласно теории векторных полей [3, с. 135], определена целочисленная характеристика $\gamma_\infty(\Phi)$ — вращение векторного поля Φ на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$. Если $\gamma_\infty(\Phi) \neq 0$, то согласно принципу ненулевого вращения [3, с. 141] имеет место равенство $\Phi(x_0) = 0$ при некоторой вектор-функции $x_0 \in C([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$, этим самым доказывается существование ω-периодических решений.

Рассмотрение квазиоднородного отображения P позволяет не только обобщить результаты работ [1, 2], но и уточнить их следующим образом. Если для положительно однородного отображения P не при всех возмущениях f имеет место априорная оценка ω-периодических решений, то класс возмущений можно сужать так, что главная нелинейная часть системы уравнений (0.1) окажется квазиоднородным отображением. Например, система двух скалярных уравнений

$$x_1'(t) = |x_1(t)|^{m-1}x_1(t) + f_1(t, x_1(t), x_2(t)), \qquad x_2'(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t)),$$

где $m > 1$, не при всех возмущениях $f(t, y_1, y_2) = \big(f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2)\big)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|y_1|+|y_2|\to\infty} (|y_1| + |y_2|)^{-m} \max_{0\le t\le\omega} |f(t, y_1, y_2)| = 0,$$

допускает априорную оценку ω-периодических решений. Если сужать класс возмущений с дополнительным условием

$$f_2(t, y_1, y_2) = |y_2|^{q-1}y_2 + \tilde{f}_2(t, y_1, y_2),$$

где

$$1 < q < m, \quad \lim_{\rho\to\infty} \rho^{-q(m-1)/(q-1)} \max_{0\le t\le\omega,\, |y_1|+|y_2|\le 1} |\tilde{f}_2(t, \rho y_1, \rho^{(m-1)/(q-1)} y_2)| = 0,$$

то в результате получаем систему уравнений вида (0.1) с квазиоднородным отображением $P(y_1, y_2) = (|y_1|^{m-1}y_1, |y_2|^{q-1}y_2)$, где $\alpha = (1, (m-1)/(q-1))$, $\nu = m-1$.

Кроме того, к системе уравнений вида (0.1) с квазиоднородной нелинейностью P приводятся многие системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с производными высоких порядков. Такие системы уравнений представляют интерес при исследовании нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с применением схемы Фаэдо–Галеркина [4, с. 118–132].

В настоящей работе доказана ограниченность множества ω-периодических решений системы уравнений (0.1) по норме пространства $C([0, \omega]; \mathrm{R}^n)$ (априорная оценка) в предположении, что $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$, $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha, \nu)$ и система уравнений (0.2) не имеет ненулевых ограниченных решений при любом фиксированном $t_0 \in [0, \omega]$. Далее, в условиях априорной оценки получены следующие результаты: 1) доказана инвариантность существования периодических решений при непрерывном изменении (гомотопии) главной квазиоднородной нелинейной части; 2) решена задача гомотопической классификации двумерных квазиоднородных отображений, удовлетворяющих условиям априорной оценки; 3) доказан критерий существования периодических решений для двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной квазиоднородной нелинейностью.

Существование периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследовано в многочисленных работах других авторов. Можно отметить работы [5, 6], где применяются идеи и методы, близкие к настоящей работе. Например, в работе [6] получены достаточные условия, которым должна удовлетворять асимптотически устойчивая в целом автономная система дифференциальных уравнений, заданная в R^n, чтобы при любом ω-периодическом ее возмущении она имела ω-периодическое решение.

1. Основные результаты

О п р е д е л е н и е 1.1. Скажем, что для ω-периодических решений системы уравнений (0.1) имеет место *априорная оценка*, если множество ω-периодических решений системы уравнений (0.1) пусто или ограничено по норме пространства $C([0,\omega];\mathrm{R}^n)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, *и при любом фиксированном* $t_0 \in [0,\omega]$ *система уравнений* (0.2) *не имеет ненулевых ограниченных решений. Тогда имеет место априорная оценка для* ω*-периодических решений системы уравнений* (0.1).

Обозначим через $\mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ множество отображений $P \in \mathfrak{P}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1.

О п р е д е л е н и е 1.2. Два отображения $P^1, P^2 \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ назовем *гомотопными*, если существует семейство отображений $\tilde{P}(\cdot,\cdot,\lambda) \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $\lambda \in [0,1]$, непрерывно зависящее от λ и такое, что $\tilde{P}(\cdot,\cdot,0) = P^1$, $\tilde{P}(\cdot,\cdot,1) = P^2$.

Верна следующая теорема об инвариантности существования ω-периодических решений при гомотопии.

Теорема 1.2. *Пусть отображения* $P^1, P^2 \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ *гомотопны, и при* $P = P^1$ *и любом* $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ *система уравнений* (0.1) *имеет* ω*-периодическое решение. Тогда система уравнений* (0.1) *при* $P = P^2$ *и любом* $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ *также имеет* ω*-периодическое решение.*

В связи с теоремой 1.2 рассмотрим следующие задачи:
– описание гомотопических классов множества $\mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ (задача гомотопической классификации);
– существование ω-периодического решения в гомотопических классах.

Исследуем эти задачи при $n = 2$.

Для $P = (P_1, P_2) \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ существует единственная функция $\theta_P(t,s)$, непрерывно зависящая от аргументов $t, s \in \mathrm{R}$ и удовлетворяющая условиям: $\theta_P(0,0) \in [0,2\pi)$,

$$P_1(t,\cos s,\sin s) = |P(t,\cos s,\sin s)|\cos(\theta_P(t,s)),$$

$$P_2(t,\cos s,\sin s) = |P(t,\cos s,\sin s)|\sin(\theta_P(t,s)).$$

Такую функцию $\theta_P(t,s)$ называют *угловой.*

Определим числа

$$\gamma_0(P) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta_P(t,s+2\pi) - \theta_P(t,s)\right), \quad \gamma_1(P) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta_P(t+\omega,s) - \theta_P(t,s)\right).$$

Эти числа целые и не зависят от t и s.

Введем функции

$$Q_1^{\alpha,p_0,p_1}(t,y_1,y_2) := |y|_{*,\alpha}^{\alpha_1+\nu} Re\Big(e^{i2\pi p_1 t/\omega}\Big(\frac{y_1}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_1}} + i\frac{y_2}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_2}}\Big)^{p_0}\Big),$$

$$Q_2^{\alpha,p_0,p_1}(t,y_1,y_2) := |y|_{*,\alpha}^{\alpha_1+\nu} Im\Big(e^{i2\pi p_1 t/\omega}\Big(\frac{y_1}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_1}} + i\frac{y_2}{|y|_{*,\alpha}^{\alpha_2}}\Big)^{p_0}\Big),$$

где $i=\sqrt{-1}$, p_0, p_1 — целые числа, $|y|_{*,\alpha}=\lambda$ если $y=(\lambda^{\alpha_1}\cos s, \lambda^{\alpha_2}\sin s)$, $\lambda\geq 0$. Легко проверить, что

$$Q^{\alpha,p_0,p_1}=(Q_1^{\alpha,p_0,p_1}, Q_2^{\alpha,p_0,p_1})\in\mathfrak{P}_{2,\omega}(\alpha,\nu), \qquad \theta_{Q^{\alpha,p_0,p_1}}(t,s)=p_0 s+\frac{2\pi p_1}{\omega}t,$$

$$\gamma_0(Q^{\alpha,p_0,p_1})=p_0, \qquad \gamma_1(Q^{\alpha,p_0,p_1})=p_1.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.3. *Пусть* $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. *Тогда*
а) $\gamma_0(P)\leq 1$;
б) *если* $\gamma_0(P)=1$, *то* P *гомотопно одному из отображений* $\pm Q^{\alpha,1,0}$;
в) *если* $\gamma_0(P)<1$, *то* P *гомотопно* Q^{α,p_0,p_1}, *где* $p_0=\gamma_0(P)$, $p_1=\gamma_1(P)$.

Теорема 1.4. *Пусть* $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. *Тогда условие* $\gamma_0(P)\neq 0$ *достаточно для существования* ω*-периодического решения системы* (0.1) *при любом* $f\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$, *а при выполнении дополнительного условия* $\nu>|(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{sign}(\gamma_1(P))|$ *условие* $\gamma_0(P)\neq 0$ *еще и необходимо для существования* ω*-периодического решения системы* (0.1) *при любом* $f\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$.

Теоремы 1.3, 1.4 доказаны по схеме работы [7].

Следствие 1.1. *Если* $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ *и* $\nu>|(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{sign}(\gamma_1(P))|$, *то условие* $\gamma_0(P)\neq 0$ *необходимо и достаточно для существования* ω*-периодического решения системы уравнений* (0.1) *при любом* $f\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$.

2. Доказательства основных результатов

В этом параграфе приведем доказательства всех сформулированных выше теорем, а также связанных с ними утверждений.

2.1. Теорема 1.1

Доказательство теоремы 1.1. Предположим, что существует неограниченная последовательность ω-периодических решений $x_k(t)$, $k=1,2,\ldots$ системы уравнений (0.1). Рассмотрим вектор-функции $y_k(t)=(y_{k1}(t),\ldots,y_{kn}(t))^\top$, $k=1,2,\ldots$, где

$$y_{kj}(t)=r_k^{-\alpha_j}x_{kj}(t_k+r_k^{-\nu}t), \quad j=\overline{1,n}, \quad t\in\mathrm{R},$$

$$r_k:=\max_{0\leq t\leq\omega}|x_k(t)|_\alpha=|x_k(t_k)|_\alpha, \qquad |z|_\alpha:=\left((z_1^2)^{1/\alpha_1}+\ldots+(z_n^2)^{1/\alpha_n}\right)^{1/2}.$$

Для вектор-функций $y_k(t)$, $k=1,2,\ldots$ имеем

$$y_k'(t)=P(t_k+r_k^{-\nu}t, y_k(t))+g_k(t), \quad |y_k(t)|_\alpha\leq|y_k(0)|_\alpha=1, \quad t\in\mathrm{R}, \quad k=1,2,\ldots,$$

где

$$g_{kj}(t)=r_k^{-\alpha_j-\nu}f_j(t_k+r_k^{-\nu}t, r_k^{\alpha_1}y_1(t),\ldots,r_k^{\alpha_n}y_n(t)), \quad j=\overline{1,n}.$$

Переходя к пределу и учитывая условие 4), получаем

$$y_0'(t)=P(t_0,y_0(t)), \quad |y_0(t)|_\alpha\leq|y_0(0)|_\alpha=1, \quad t\in\mathrm{R}.$$

Пришли к противоречию. $\square$

2.2. Теорема 1.2

Пусть отображения $P^1, P^2 \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ гомотопны и $\tilde{P}(\cdot,\cdot,\lambda) \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$, $\lambda \in [0,1]$ — непрерывная линия (путь), соединяющая P^1 и P^2, $\tilde{P}(\cdot,\cdot,0) = P^1$, $\tilde{P}(\cdot,\cdot,1) = P^2$. Проверим справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. *Существует $\sigma > 0$ такое, что для любой ω-периодической вектор-функции $x \in C^1(\mathrm{R};\mathrm{R}^n)$, удовлетворяющей условию $\max\{|x(t)|_\alpha : 0 \le t \le \omega\} > \sigma^{-1}$, верна оценка*

$$\max_{0\le t\le\omega} \left| x'_{j_0}(t) - \tilde{P}_{j_0}(t, x(t), \lambda) \right| > \sigma \max_{0\le t\le\omega} \left| x(t) \right|_\alpha^{\alpha_{j_0}+\nu}$$

при некотором $j_0 = j_0(x)$ и любом значении $\lambda \in [0,1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что такое $\sigma > 0$ не существует. Тогда найдутся последовательности $\lambda_k \in [0,1]$, $x_k \in C^1(\mathrm{R};\mathrm{R}^n)$, $k = 1,2,\ldots$ такие, что

$$x_k(t+\omega) \equiv x_k(t), \qquad r_k := \max_{0\le t\le\omega} |x_k(t)|_\alpha = |x_k(t_k)|_\alpha > k,$$

$$\max_{0\le t\le\omega} \left| x'_{kj}(t) - \tilde{P}_j(t, x_k(t), \lambda_k) \right| \le \frac{1}{k} r_k^{\alpha_j+\nu}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим вектор-функции $y_k(t) = (y_{k1}(t), \ldots, y_{kn}(t))^\top$, $k = 1,2,\ldots$, где

$$y_{kj}(t) = r_k^{-\alpha_i} x_{kj}(t_k + r_k^{-\nu} t), \quad j = \overline{1,n}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Для вектор-функций $y_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ имеем

$$y'_{kj}(t) = P_j(t_k + r_k^{-\nu} t, y_k(t), \lambda_k) + g_{kj}(t), \quad j = \overline{1,n},$$

$$|y_k(t)|_\alpha \le |y_k(0)|_\alpha = 1, \quad |g_{kj}(t)| \le \frac{1}{k}, \quad t \in \mathrm{R}, \quad k = 1,2,\ldots,$$

где

$$g_{kj}(t) \equiv r_k^{-\alpha_j-\nu} \left(x'_{kj}(t_k + r_k^{-\nu} t) - \tilde{P}_j(t_k + r_k^{-\nu} t, x_k(t_k + r_k^{-\nu} t), \lambda_k) \right).$$

Переходя к пределу, получаем

$$y'_0(t) = P(t_0, y_0(t), \lambda_0), \quad |y_0(t)|_\alpha \le |y_0(0)|_\alpha = 1, \quad t \in \mathrm{R},$$

что противоречит условию $\tilde{P}(\cdot,\cdot,\lambda_0) \in \mathfrak{P}^0_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.2. Пусть σ — число, удовлетворяющее условию леммы 2.1. Покажем, что если для $\lambda, \mu \in [0,1]$ выполнено неравенство

$$\max_{0\le t\le\omega} \left| \tilde{P}_j(t,y,\lambda) - \tilde{P}_j(t,y,\mu) \right| \le \frac{\sigma}{4} |y|_\alpha^{\alpha_j+\nu}$$

при любых $y \in \mathrm{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, то из существования ω-периодического решения системы

$$x'(t) = \tilde{P}(t, x(t), \lambda) + g(t, x(t)), \quad t \in \mathrm{R} \tag{2.1}$$

при любом $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ вытекает существование ω-периодического решения системы

$$x'(t) = \tilde{P}(t, x(t), \mu) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathrm{R} \tag{2.2}$$

при любом $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. Этим самым теорема 1.2 будет доказана.

Для произвольного $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ построим $g_f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ так, чтобы при $g = g_f$ всякое ω-периодическое решение системы (2.1) оказалось решением системы (2.2). Воспользуемся тем, что для $f \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$ имеет место неравенство

$$|f_j(t,y)| < \frac{\sigma}{4}|y|_\alpha^{\alpha_j+\nu} + M, \quad y \in \mathrm{R}^n, \quad j = \overline{1,n},$$

где $M > 0$ и зависит лишь от f и σ. Выберем число r, удовлетворяющее условиям $r > 1/\sigma$, $r^{\alpha_j+\nu} > 2M/\sigma$ при всех $j = \overline{1,n}$. Положим

$$g_f(t,y) := f(t,y) + \eta_r(|y|_\alpha)(\tilde{P}(t,y,\mu) - \tilde{P}(t,y,\lambda)),$$

где $\eta_r \in C[0,+\infty)$, $0 \le \eta_r(\tau) \le 1$, $\eta_r(\tau) = 1$ при $\tau \le r$ и $\eta_r(\tau) = 0$ при $\tau \ge r+1$. Очевидно, $g \in \mathfrak{R}_{n,\omega}(\alpha,\nu)$. Пусть $x(t)$ — ω-периодическое решение системы (2.1) при $g = g_f$. Проверим, что $A := \max\{|x(t)|_\alpha : 0 \le t \le \omega\} \le r$; тогда $x(t)$ будет решением системы (2.2). Действительно, если $A > r$, то согласно лемме 2.1 при некотором $j_0 = j_0(x)$ имеет место неравенство

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|x'_{j_0}(t) - \tilde{P}_{j_0}(t,x(t),\lambda)\right| > \sigma A^{\alpha_{j_0}+\nu}.$$

С другой стороны, в силу системы уравнений (2.1) имеем;

$$\max_{0\le t\le\omega}\left|x'_{j_0}(t) - \tilde{P}_{j_0}(t,x(t),\lambda)\right| = \max_{0\le t\le\omega}|(g_f)_{j_0}(t,x(t))| \le \frac{\sigma}{2}A^{\alpha_{j_0}+\nu} + M.$$

Следовательно, $r^{\alpha_{j_0}+\nu} < A^{\alpha_{j_0}+\nu} < 2M/\sigma$. Полученное противоречит выбору r. □

2.3. Теорема 1.3

Пусть $Q = (Q_1, Q_2) : \mathrm{R}^2 \mapsto \mathrm{R}^2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее условию квазиоднородности $Q \in \mathfrak{P}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ и условию невырожденности $Q(\cos s, \sin s) \ne 0$ $\forall s \in \mathrm{R}$. Выясним, при каких дополнительных условиях имеет место включение $Q \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. Для этого определим непрерывные угловые функции $\theta_Q(s)$, $\theta_\alpha(s)$ из следующих равенств:

$$Q_1(\cos s, \sin s) = |Q(\cos s, \sin s)|\cos(\theta_Q(s)),$$

$$Q_2(\cos s, \sin s) = |Q(\cos s, \sin s)|\sin(\theta_Q(s)),$$

$$\cos(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_1\cos s}{b_\alpha(s)}, \quad \sin(\theta_\alpha(s)) = \frac{\alpha_2\sin s}{b_\alpha(s)},$$

где $s \in \mathrm{R}$, $\theta_Q(0) \in [0,2\pi)$, $\theta_\alpha(0) = 0$, $b_\alpha(s) = ((\alpha_1\cos s)^2 + (\alpha_2\sin s)^2))^{1/2}$. Определим число

$$\gamma(Q) := \frac{1}{2\pi}\left(\theta_Q(s+2\pi) - \theta_Q(s)\right),$$

которое является целым и не зависит от s.

Пусть $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in (\tau_1,\tau_2)$ — произвольное ненулевое решение системы уравнений

$$x'(t) = Q(x(t)), \quad x(t) \in \mathrm{R}^2. \tag{2.3}$$

Скалярно перемножая на $x(t)$ можно проверить, что $x(t)$ нигде не обращается в ноль. Произведем замену $x_1(t) = r^{\alpha_1}(t)\cos\psi(t)$, $x_2(t) = r^{\alpha_2}(t)\sin\psi(t)$. Данная замена обратима и относительно $r(t)$ и $\psi(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \xi'(t)r'(t) = r(t)|Q(\cos\psi(t), \sin\psi(t))|\cos\left(\theta_Q(\psi(t)) - \psi(t)\right), \\ \xi'(t)\psi'(t) = |Q(\cos\psi(t), \sin\psi(t))| b_\alpha(\psi(t))\sin\left(\theta_Q(\psi(t)) - \theta_\alpha(\psi(t))\right), \end{cases}$$

где

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{\alpha_1\cos^2\psi(s) + \alpha_2\sin^2\psi(s)}{r^\nu(s)|Q(\cos\psi(s), \sin\psi(s))|}ds.$$

Отсюда для $\rho(t) = r(\xi(t))$, $\varphi(t) = \psi(\xi(t))$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho'(t) = \rho(t)\cos\left(\theta_Q(\varphi(t)) - \varphi(t)\right), \\ \varphi'(t) = b_\alpha(\varphi(t))\sin\left(\theta_Q(\varphi(t)) - \theta_\alpha(\varphi(t))\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

Таким образом, установлено, что система уравнений (2.3) не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда система уравнений (2.4) не имеет решений с ненулевой и ограниченной координатой $\rho(t)$.

Лемма 2.2. *Пусть*

$$\sin\left(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)\right) \neq 0 \qquad \forall s \in \mathrm{R}. \tag{2.5}$$

Тогда $\gamma(Q) = 1$ и система уравнений (2.3) не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено условие

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_Q(s) - s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s))}ds \neq 0. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие (2.5), то

$$\pi j_0 < \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < \pi(j_0 + 1)$$

при некотором целом j_0 и всех $s \in \mathrm{R}$. Отсюда выводим:

$$-\pi < (\theta_Q(s + 2\pi) - \theta_Q(s)) - (\theta_\alpha(s + 2\pi) - \theta_\alpha(s)) < \pi,$$

$$-\pi < 2\pi\gamma(Q) - (\theta_\alpha(s + 2\pi) - \theta_\alpha(s)) < \pi,$$

следовательно, $\gamma(Q) = 1$, так как $\theta_\alpha(s + 2\pi) - \theta_\alpha(s) = 2\pi$. Кроме того, из условия (2.5) следует, что для произвольного решения системы уравнений (2.4) его координата $\varphi(t)$ строго монотонна, и для любого целого l существует t_l такое, что $\varphi(t + t_l) \equiv \varphi(t) + 2\pi l$. Отсюда, в силу первого уравнения системы (2.5), выводим:

$$\ln\rho(t + t_l) \equiv \ln\rho(t) + l\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_Q(s) - s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s))}ds.$$

Следовательно, координата $\rho(t)$ ограничена лишь при выполнении условия (2.6). $\square$

Пусть $\sin\left(\theta_Q(s_0) - \theta_\alpha(s_0)\right) = 0$ при некотором $s_0 \in [0, 2\pi)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Интервал $(s_1, s_2) \subset (s_0, s_0+2\pi)$, где $\sin(\theta_Q(s_j) - \theta_\alpha(s_j)) = 0$, $j = 1, 2$, назовем

гиперболическим, если

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) > 0 \;\; \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) < 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) > 0$$

или

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) < 0 \;\; \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) > 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) < 0;$$

эллиптическим, если

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) > 0 \;\; \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) > 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) < 0,$$

или

$$\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) < 0 \;\; \forall s \in (s_1, s_2), \quad \cos(\theta_Q(s_1) - s_1) < 0, \quad \cos(\theta_Q(s_2) - s_2) > 0;$$

параболическим, если не пересекается с гиперболическими и эллиптическими интервалами и не содержится в другом более широком интервале, не пересекающимся с гиперболическими и эллиптическими интервалами.

Можно непосредственно проверить справедливость следующих шести утверждений.

Утверждение 2.1. *Если φ_0 принадлежит гиперболическому (эллиптическому, параболическому) интервалу, то среди решений системы уравнений (2.4), удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = \varphi_0$, существует решение, у которого координата $\rho(t)$*

а) *неограничена при $t > 0$ и $t < 0$ — в гиперболическом случае;*

б) *ограничена при $t > 0$ и $t < 0$ — в эллиптическом случае;*

в) *ограничена при $t > 0$ $(t < 0)$ и неограничена при $t < 0$ $(t > 0)$ — в параболическом случае.*

Утверждение 2.2. *Число гиперболических, эллиптических и параболических интервалов конечно и объединения их замыканий совпадают с отрезком $[s_0, s_0 + 2\pi]$.*

Утверждение 2.3. *Для концов s_1, s_2 интервала (s_1, s_2), являющегося гиперболическим (эллиптическим, параболическим), справедливо равенство*

$$\theta_Q(s_2) - \theta_\alpha(s_2) = \theta_Q(s_1) - \theta_\alpha(s_1) + \chi\pi,$$

где χ равно -1, 1 или 0 соответственно в зависимости от гиперболичности, эллиптичности или параболичности интервала (s_1, s_2).

Утверждение 2.4. *Справедлива формула*

$$\gamma(Q) = 1 + \frac{1}{2}\left(n_Э - n_Г\right),$$

где $n_Г$ и $n_Э$ — число гиперболических и эллиптических интервалов соответственно.

Утверждение 2.5. *Если система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений, то*

$$\gamma(Q) = 1 - \frac{1}{2} n_{\Gamma} \leq 1. \tag{2.7}$$

Утверждение 2.6. *Система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений тогда и только тогда, когда* $n_{Э} = 0$ *и* (2.3) *не имеет ненулевых периодических решений.*

Лемма 2.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\gamma(Q) = 1$;

2) $\sin(\theta_Q(s_0) - \theta_\alpha(s_0)) = 0$ *при некотором* $s_0 \in [0, 2\pi)$;

3) *при любом* $x_0 \in \mathrm{R}^2$ *единственно решение системы уравнений* (2.3), *удовлетворяющее начальному условию* $x(0) = x_0$.

Тогда система уравнений (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено одно из двух условий: либо*

$$-\pi < \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < \pi \quad \forall s \in \mathrm{R}, \tag{2.8}$$

либо

$$0 < \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < 2\pi \quad \forall s \in \mathrm{R}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Заметим, что выполнение одного из условий (2.8), (2.9) равносильно равенствам $n_{Э} = n_{\Gamma} = 0$.

Если система уравнений (2.3) не имеет ненулевых ограниченных решений, то $n_{Э} = 0$ и в силу условия $\gamma(Q) = 1$ и формулы (2.7) получаем $n_{\Gamma} = 0$. Обратно, если $n_{Э} = n_{\Gamma} = 0$, то для системы уравнений (2.3), согласно утверждению 2.6, отсутствие ненулевых ограниченных решений равносильно отсутствию ненулевых периодических решений. А в силу условий 2) и 3) ненулевое периодическое решение не существует. □

Лемма 2.4. *Если* $\gamma(Q) < 1$, *то система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено условие*

$$\big(\exists s_1\ \exists j_1 - \textit{целое} \quad \theta_Q(s_1) - \theta_\alpha(s_1) = \pi j_1\big) \implies \theta_Q(s) - \theta_\alpha(s) < \pi j_1 + \pi \quad \forall s > s_1. \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу условия $\gamma(Q) < 1$ и утверждения 2.6 для системы уравнений (2.3) отсутствие ненулевых ограниченных решений равносильно равенству $n_{Э} = 0$. А это равенство равносильно условию (2.10). □

Леммы 2.2–2.4 подытожим следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Пусть* $Q \in \mathfrak{P}_{2,\omega}(\alpha, \nu)$, $Q(\cos s, \sin s) \neq 0 \ \forall s \in \mathrm{R}$ *и пусть при* $\gamma(Q) = 1$ *единственно решение задачи Коши для системы уравнений* (2.3) *с любым начальным значением* $x_0 \in \mathrm{R}^2$. *Тогда система уравнений* (2.3) *не имеет ненулевых ограниченных решений лишь в том случае, когда выполнено одно из следующих условий:*

Условие 2.1. $\gamma(Q) = 1$, $\sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s)) \neq 0 \ \forall s \in \mathrm{R}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(\theta_Q(s) - s)}{b_\alpha(s) \sin(\theta_Q(s) - \theta_\alpha(s))} ds \neq 0.$$

Условие 2.2. *$\gamma(Q)=1$, $\sin(\theta_Q(s_0)-\theta_\alpha(s_0))=0$ при некотором $s_0\in[0,2\pi)$, либо $-\pi<\theta_Q(s)-\theta_\alpha(s)<\pi$ $\forall s\in\mathrm{R}$, либо $0<\theta_Q(s)-\theta_\alpha(s)<2\pi$ $\forall s\in\mathrm{R}$.*

Условие 2.3. *$\gamma(Q)<1$ и $\big(\exists s_1\in\mathrm{R}\ \ \exists j_1$ – целое $\ \theta_Q(s_1)-\theta_\alpha(s_1)=\pi j_1\big)\implies \theta_Q(s)-\theta_\alpha(s)<\pi j_1+\pi\quad\forall s>s_1$.*

Теорема 2.1 для положительно однородного отображения Q анонсирована в работе [8].

Доказательство утверждений а), б), в) теоремы 1.3. Пусть $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. Без ограничения общности можно считать, что $P(t,y)$ гладко зависит от y. Утверждение а) теоремы 1.3 следует из утверждения 2.5.

Для доказательства утверждений б) и в) воспользуемся теоремой 2.1. Из теоремы 2.1 вытекает, что включение $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ равносильно одному из следующих трех условий:

Условие 2.4. *$\gamma_0(P)=1$ и при любом $t\in\mathrm{R}$ либо*

$$\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))\neq 0\quad\forall s\in\mathrm{R},\qquad\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta_P(t,s)-s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))}ds>0,$$

либо $\sin(\theta_P(t,s_0)-\theta_\alpha(s_0))=0$ при некотором $s_0\in[0,2\pi)$ и

$$-\pi<\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)<\pi\quad\forall s\in\mathrm{R}.$$

Условие 2.5. *$\gamma_0(P)=1$ и при любом $t\in\mathrm{R}$ либо*

$$\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))\neq 0\quad\forall s\in\mathrm{R},\qquad\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\theta_P(t,s)-s)}{b_\alpha(s)\sin(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))}ds<0,$$

либо $\sin(\theta_P(t,s_0)-\theta_\alpha(s_0))=0$ при некотором $s_0\in[0,2\pi)$ и

$$0<\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)<2\pi\quad\forall s\in\mathrm{R}.$$

Условие 2.6. *$\gamma_0(P)<1$ и $\big(\exists s_n\in\mathrm{R}\ \ \exists j_1$ – целое $\ \theta_P(t,s_1)-\theta_\alpha(s_1)=\pi j_1\big)\implies \theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)<\pi j_1+\pi\quad\forall s>s_1$.*

Пусть выполнены условия 2.4. Построим семейство угловых функций $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$, непрерывно зависящее от t,s,λ, удовлетворяющее условиям 2.4 при любых фиксированных t,λ и $\Theta(t,s,0)=\theta_P(t,s)$, $\Theta(t,s,1)=s$. Этим самым будет доказана гомотопность отображений P и $Q^{1,0}$. Семейство $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$ построим следующими формулами:

$$\Theta(t,s,\lambda)=\theta_\alpha(s)+(1-2\lambda)(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s)),\quad\lambda\in[0,1/2],$$

$$\Theta(t,s,\lambda)=(2-2\lambda)\theta_\alpha(s)+(2\lambda-1)s,\quad\lambda\in[1/2,1].$$

При любых фиксированных t,λ функция $\Theta(t,s,\lambda)$ удовлетворяет условиям 2.4.

Если выполнены условия 2.5, то семейство $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$ определим формулами

$$\Theta(t,s,\lambda)=\theta_\alpha(s)+(1-2\lambda)(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))+2\lambda\pi,\quad\lambda\in[0,1/2],$$

$$\Theta(t,s,\lambda)=(2-2\lambda)\theta_\alpha(s)+(2\lambda-1)s+\pi,\quad\lambda\in[1/2,1].$$

При любых фиксированных t,λ функция $\Theta(t,s,\lambda)$ удовлетворяет условиям 2.5. Отсюда следует гомотопность отображений P и $-Q^{1,0}$. Утверждение б) теоремы 1.3 доказано.

Если выполнены условия 2.6, то семейство $\Theta(t,s,\lambda)$, $\lambda\in[0,1]$ построим следующими формулами:

$$\Theta(t,s,\lambda)=\theta_\alpha(s)+(1-3\lambda)(\theta_P(t,s)-\theta_\alpha(s))$$
$$+3\lambda\max\left(\theta_P(t,2\pi)-2\pi,\quad \min_{0\le\tau\le s}(\theta_P(t,\tau)-\theta_\alpha(\tau))\right),\quad \lambda\in[0,1/3],$$

$$\Theta(t,s,\lambda)=\theta_\alpha(s)+(3\lambda-1)(\theta_P(t,0)+(p_0-1)s)$$
$$+(2-3\lambda)\max\left(\theta_P(t,2\pi)-2\pi,\quad \min_{0\le\tau\le s}(\theta_P(t,\tau)-\theta_\alpha(\tau))\right),\quad \lambda\in[1/3,2/3],$$

$$\Theta(t,s,\lambda)=(3-3\lambda)(\theta_\alpha(s)+\theta_P(t,0))+(3\lambda-2)(2\pi p_1t/\omega+s)+(p_0-1)s,\quad \lambda\in[2/3,1],$$

где $p_0=\gamma_0(P)$, $p_1=\gamma_1(P)$. При любых фиксированных t,λ функция $\Theta(t,s,\lambda)$ удовлетворяет условиям 2.6. Отсюда следует гомотопность отображений P и Q^{p_0,p_1}. Утверждение в) теоремы 1.3 доказано. $\square$

2.4. Теорема 1.4

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы   1.4.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$, $\nu>|(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{sign}(\gamma_1(P))|$ и $\gamma_0(P)=0$. Покажем, что для такого P при некотором $f\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ система уравнений (0.1) не имеет ω-периодических решений. Учитывая теоремы 1.2 и 1.3, можно считать, что $P=Q^{\alpha,0,p_1}$. В этом случае система уравнений (0.1) принимает вид

$$\begin{cases} x_1'(t)=|x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_1+\nu}\cos\frac{2\pi p_1}{\omega}t+f_1(t,x_1(t),x_2(t)),\\ x_2'(t)=|x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_2+\nu}\sin\frac{2\pi p_1}{\omega}t+f_2(t,x_1(t),x_2(t)),\end{cases}\tag{2.11}$$

где $p_1=\gamma_1(P)$, $|y|_{*,\alpha}=\lambda$, если $y=(\lambda^{\alpha_1}\cos s,\lambda^{\alpha_2}\sin s)$, $\lambda\ge0$.

Положим

$$f_1(t,y_1,y_2)=-\frac{2\pi p_1}{\omega}y_2+\cos\frac{2\pi p_1}{\omega}t,\qquad f_2(t,y_1,y_2)=\frac{2\pi p_1}{\omega}y_1+\sin\frac{2\pi p_1}{\omega}t.$$

Тогда для любого решения системы (2.11) имеем:

$$\left(x_1(t)\cos\frac{2\pi p_1}{\omega}t+x_2(t)\sin\frac{2\pi p_1}{\omega}t\right)'=|x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_1+\nu}\cos^2\frac{2\pi p_1}{\omega}t+|x(t)|_{*,\alpha}^{\alpha_2+\nu}\sin^2\frac{2\pi p_1}{\omega}t+1.$$

В силу условия $\nu>|(\alpha_1-\alpha_2)\mathrm{sign}(p_1)|$ справедливо включение $f=(f_1,f_2)\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. Следовательно, при таком $f\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ система уравнений (2.11) не имеет ω-периодических решений.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $P\in\mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\alpha,\nu)$ и $\gamma_0(P)\ne0$. Покажем, что для рассматриваемого P система (0.1) имеет ω-периодическое решение при любом $f\in\mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$. Учитывая теоремы 1.2 и 1.3, можно считать, что $P=Q^{\alpha,p_0,p_1}$, где $p_0=\gamma_0(P)$, $p_1=\gamma_1(P)$. В этом случае система уравнений (0.1) принимает вид

$$\begin{cases} x_1'(t) = Q_1^{\alpha,p_0,p_1}(t,x_1(t),x_2(t)) + f_1(t,x_1(t),x_2(t)), \\ x_2'(t) = Q_2^{\alpha,p_0,p_1}(t,x_1(t),x_2(t)) + f_2(t,x_1(t),x_2(t)). \end{cases} \tag{2.12}$$

Существование ω-периодического решения системы уравнений (2.12) равносильно существованию нуля вполне непрерывного векторного поля

$$\Phi(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t \left(Q^{\alpha,p_0,p_1}(s,x(s)) + f(s,x(s))\right) ds$$

в банаховом пространстве $C([0,\omega];\mathrm{R}^2)$ с нормой $\|x\| := \max_{0\le t\le\omega}|x(t)|$.

Из теоремы 1.1 вытекает, что векторное поле $\Phi(x)$ не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega];\mathrm{R}^2)$. Поэтому, согласно теории векторных полей [3, с. 135], определена целочисленная характеристика $\gamma_\infty(\Phi)$ — вращение векторного поля Φ на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega];\mathrm{R}^2)$. Покажем, что

$$\gamma_\infty(\Phi) \neq 0. \tag{2.13}$$

Тогда согласно принципу ненулевого вращения [3, с. 141] имеет место равенство $\Phi(x_0) = 0$ при некоторой вектор-функции $x_0 \in C([0,\omega];\mathrm{R}^2)$. Этим самым будет доказано существование ω-периодического решения системы уравнений (2.12) при любом $f \in \mathfrak{R}_{2,\omega}(\alpha,\nu)$.

Из теоремы 1.1 следует, что семейство векторных полей

$$\Phi_\mu(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t \left(Q^{\alpha,p_0,p_1}(s,x(s)) + \mu f(s,x(s))\right) ds, \quad \mu \in [0,1],$$

не обращается в ноль вне шара $\|x\| < r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega];\mathrm{R}^2)$. Другими словами, векторные поля $\Phi = \Phi_0$ и Φ_1 гомотопны на сфере $\|x\| = r$ большого радиуса r пространства $C([0,\omega];\mathrm{R}^2)$. Поэтому, согласно свойству сохранения вращения при гомотопии, имеем:

$$\gamma_\infty(\Phi) = \gamma_\infty(\Phi_0). \tag{2.14}$$

Семейство вполне непрерывных векторных полей

$$\Psi_\mu(x) \equiv x(t) - x(\omega) - \int_0^t Q^{\tilde\alpha(\mu),p_0,p_1}(s,x(s))ds, \quad \mu \in [0,1],$$

где $\tilde\alpha(\mu) = (1-\mu)\alpha + \mu(1,1)$, не обращается в ноль при $x(t) \not\equiv 0$. Это следует из включения $Q^{\tilde\alpha(\mu),p_0,p_1} \in \mathfrak{P}^0_{2,\omega}(\tilde\alpha(\mu),\nu)$, которое верно при любом $\mu \in [0,1]$. Отсюда выводим

$$\gamma_\infty(\Phi_0) = \gamma_\infty(\Psi_1). \tag{2.15}$$

В работе [7] доказано, что $\gamma_\infty(\Psi_1)$ равно p_0 или 1. Учитывая это и условие $p_0 \neq 0$, из (2.14) и (2.15) получаем (2.13). □

Авторы выражают искреннюю благодарность профессору Э. Мухамадиеву за обсуждение результатов работы и высказанные замечания.

References

[1] Э. Мухамадиев, “К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **194**:3 (1970), 510–513; англ. пер.:E. Mukhamadiev, “On the theory of periodic solutions of systems of ordinary differential equations”, *Sov. Math., Dokl.*, **11** (1970), 1236–1239.

[2] Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, “О разрешимости периодической задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с главной положительно однородной нелинейностью”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:2 (2023), 280–282; англ. пер.:E. Mukhamadiev, A. N. Naimov, “On the solvability of a periodic problem for a system of ordinary differential equations with the main positive homogeneous nonlinearity”, *Differential Equations*, **59**:2 (2023), 289–291.

[3] М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, *Геометрические методы нелинейного анализа*, Наука, М., 1975. [M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreiko, *Geometric Methods of Nonlinear Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian)].

[4] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972. [J. L. Lyons, *Some Methods for Solving Nonlinear Boundary Value Problems*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].

[5] В. Г. Звягин, С. В. Корнев, “Метод направляющих функций в задаче о существовании периодических решений дифференциальных уравнений”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **58**:1 (2015), 59–81; англ. пер.:V. G. Zvyagin, S. V. Kornev, “Method of guiding functions for existence problems for periodic solutions of differential equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **233**:4 (2018), 578–601.

[6] А. И. Перов, В. К. Каверина, “Об одной задаче Владимира Ивановича Зубова”, *Дифференциальные уравнения*, **55**:2 (2019), 269–272; англ. пер.:A. I. Perov, V. K. Kaverina, “On a problem posed by Vladimir Ivanovich Zubov”, *Differential Equations*, **55**:2 (2019), 274–278.

[7] Э. Мухамадиев, А. Н. Наимов, М. М. Кобилзода, “О разрешимости одного класса периодических задач на плоскости”, *Дифференциальные уравнения*, **57**:2 (2021), 203–209; англ. пер.:E. Mukhamadiev, A. N. Naimov, M. M. Kobilzoda, “Solvability of a class of periodic problems on the plane”, *Differential Equations*, **57**:2 (2021), 189–195.

[8] Н. А. Бобылев, “О построении правильных направляющих функций”, *Докл. АН СССР*, **183**:2 (1968), 265–266; англ. пер.:N. A. Bobylev, “The construction of regular guiding functions”, *Sov. Math., Dokl.*, **9** (1968), 1353–1355.

Информация об авторах

Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, Вологодский государственный университет, г. Вологда, Российская Федерация. E-mail: naimovan@vogu35.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6194-7164

Быстрецкий Михаил Васильевич, младший научный сотрудник, Вологодский государственный университет, г. Вологда, Российская Федерация. E-mail: pmbmv@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-3192-0675

Information about the authors

Alizhon N. Naimov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematics and Informatics Department, Vologda State University, Vologda, Russian Federation. E-mail: naimovan@vogu35.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6194-7164

Mikhail M. Bystretskii, Junior Researcher, Vologda State University, Vologda, Russian Federation. E-mail: pmbmv@bk.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0004-3192-0675

Конфликт интересов отсутствует.

There is no conflict of interests.

Для контактов:
Наимов Алижон Набиджанович
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Corresponding author:
Alizhon N. Naimov
E-mail: naimovan@vogu35.ru

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.
Поступила после рецензирования 28.05.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Received 29.01.2024
Reviewed 28.05.2024
Accepted for press 13.09.2024